GeoGebra

Guía y Referencia de versiones para ***Web*** y para ***Tablet***

Autoría de Liliana Saidón[1] Dir. Centro Babbage Instituto GeoGebra de Argentina

¿Qué es GeoGebra?

- Un conjunto unificado y fácil de usar que conforma un potente programa de Matemática Dinámica
- Un utilitario para enseñar y aprender en todos los niveles educativos
- Un encuadre versátil en que se conjugan **geo**metría interactiva, ál**gebra**, el cálculo propio del análisis y de las estadísticas y sus registros gráficos, de organización en tablas y de formulación simbólica.
- Una fuente abierta del programa libre accesible en www.geogebra.org

Lo Primero a Destacar

- *GeoGebra* le facilita a los estudiantes la creación de construcciones matemáticas y modelos para las exploraciones interactivas y los sucesivos cambios de parámetros.
- *GeoGebra* es también una herramienta de autoría que les permite a los docentes crear páginas-web interactivas, adaptarlas de entre las existentes y/o seleccionarlas de entre las que colegas de todo el mundo ofrecen para compartir las producciones en www.geogebratube.org.

Al Comenzar

Al iniciar la versión de *GeoGebra* para *Web* o *Tablet*, aparece la siguiente pantalla de inicio con las *Perspectivas* disponibles:

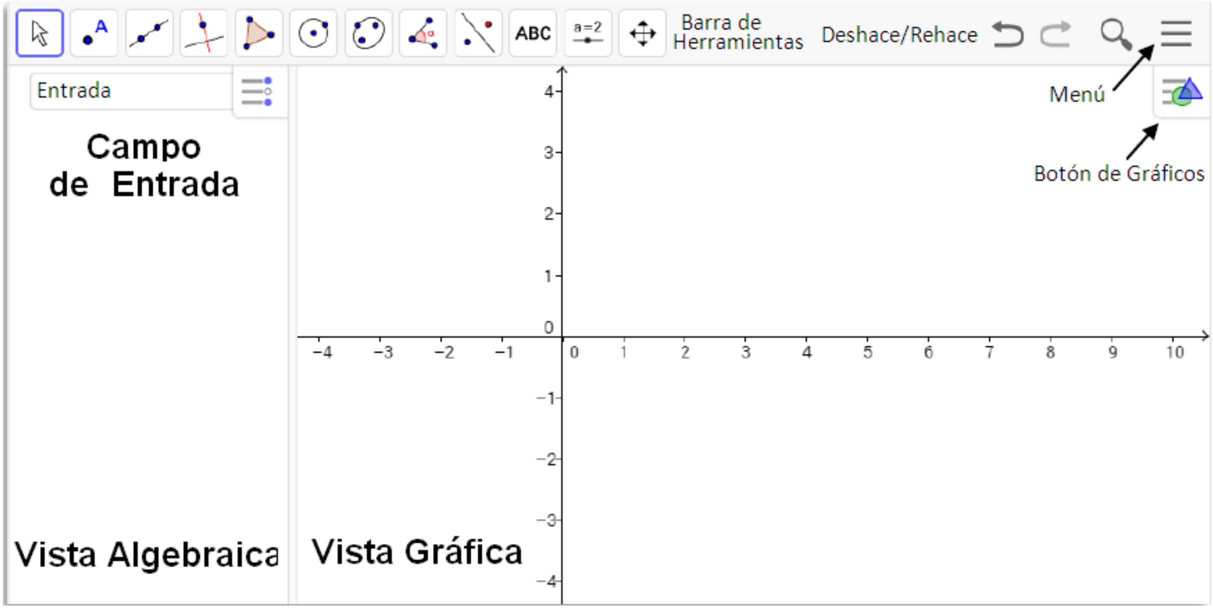


Basta con seleccionar la Perspectiva que mejor se adecúa a los temas de matemática a trabajar (Geometría, Álgebra, Estadísticas…), para empezar.

[1] Se agradece por sugerencias y propuestas a Judith Hohenwarter judith@geogebra.org y Markus markus@geogebra.org

Si más adelante, en cualquier otro momento, se cambia de enfoque, se puede volver a este menú y elegir otra ***Perspectiva***.

La siguiente imagen ilustra la pantalla usual de la *Perspectiva Algebraica* que incluye la **Vista Algebraica** y la **Vista Gráfica** en la ventana de GeoGebra.



La **Barra de Herramientas** incluye una serie de cajas con una colección de útiles del mismo tipo que permiten crear construcciones en la **Vista Gráfica** simplemente apuntando a una y otra, además de a los objeto o elementos adicionales necesarios en cada caso.

Mientras se despliega cada uno de los elementos de la construcción, en simultáneo van apareciendo las coordenadas y ecuaciones correspondientes, en la **Vista Algebraica**.

Como cada ***Vista*** cuenta con su propia **Barra de Herramientas**, da acceso a diferentes juegos de útiles.

El **Campo de Entrada** en la **Vista Algebraica** permite el ingreso directo de coordenadas, ecuaciones, comandos o funciones. Al pulsar la tecla de entrada (sea **Enter** o **Intro** en algunos casos), el registro algebraico aparece en esta ***Vista*** y así como la construcción en la **Vista Gráfica**.

Además de la **Vista Gráfica** que aparece expuesta en la disposición usual, puede ponerse a la **Vista**, desde el correspondiente menú:

- La **Vista Gráfica 3D**
- la **Vista CAS de Álgebra Simbólica** en la que se puede operar con literales empleando herramientas específicas
- la **Hoja de Cálculo** en que puede operarse con herramientas acorde, incluso con recursos estadísticos de tratamiento de los datos
- una instancia de **Cálculo de Probabilidades** para graficar este tipo de distribuciones.

Todas las ***Vistas*** de GeoGebra están dinámicamente vinculadas de modo tal que los cambios en un objeto no solo desencadenan los propios en los dependientes sino que las modificaciones provenientes de cualquiera de sus registros y se reflejarán de inmediato en los restantes.

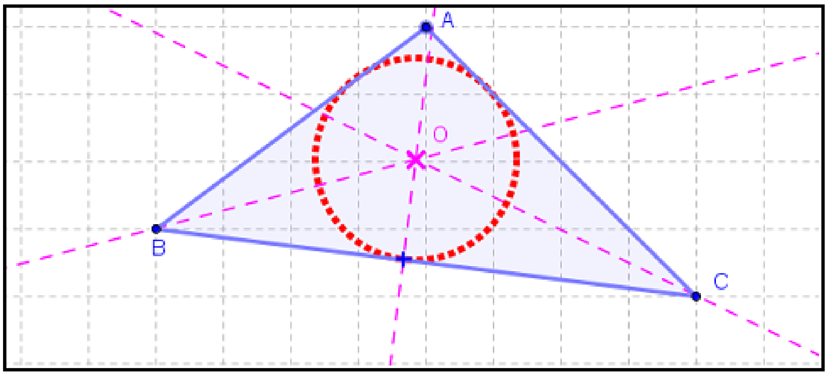
Sea “a dedo” en ***Tablet*** o, en la versión ***Web***, guiando con el ratón (o *mouse*) los útiles de la **Barra de Herramientas,** pueden trazarse construcciones en la **Vista Gráfica** a partir de elementos cuyas coordenadas o ecuaciones aparecen, en simultáneo, en la **Vista Algebraica*:*** lo geométrico y lo algebraico en GeoGebra, se complementan y se registran uno junto al otro.

A continuación se desarrollarán ejemplos que pueden llevarse adelante tanto en la versión ***Web*** como la de GeoGebra para ***Tablet***, sea *clic* a *clic* con el ratón o *mouse* o “a dedo”. Para agiliza la redacción, se mantendrá el término *'clic'* como *onomatopeya* general.

En la ***Barra de Entrada*** pueden anotarse directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones que pasarán a representarse en la ***Vista Gráfica*** al ingresarse pulsando *Enter* (*Intro* en algunos teclados).

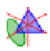
Primer Ejemplo: Circunferencias en un Triángulo

Tarea*: Construir un triángulo y la circunferencia que lo circunscribe.*

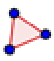
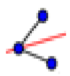
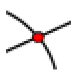


Construcción Guiada por el *Ratón o Mouse*

Preparativos

- Abrir el menú de **Perspectivas** seleccionar la de  *Geometría*.
- Practicar un poco el modo de empleo de las **Herramientas** de la **Barra** de la **Vista Gráfica** teniendo en cuenta que las de cada caja se despliegan al pulsar sobre la primera.

Pasos de la Construcción

1		Seleccionar de la barra de herramientas, la de *“Polígono”*. Ahora, un *clic* tras otro en la **Vista Gráfica**, permite crear los vértices *A*, *B*, y *C* de un triángulo que se cierra reiterando un *clic* sobre A.
2		Elegir la *Bisectriz:* (*clic* sobre la herramienta “carátula” de la cuarta caja, despliega todas las disponibles para activar la *Bisectriz).* Para trazar las de un par de ángulos, basta con indicar los tres puntos que los delimitan, en sentido anti-horario con el vértice entre sendos laterales: *B, C, A* para uno y *A, B, C* para el otro.
3		Con la herramienta *Intersección,* indicando ambas bisectrices, queda establecido el punto del centro de la circunferencia buscada. Para llamarlo *“O*”, basta con un *clic* derecho sobre el punto (Mac OS: ctrl-*clic*) y elegir *“Renombra”* del menú contextual desplegado.

4		Se traza la *"Recta Perpendicular"* desde *"O"* al segmento *a* (del lado que une *a B* con *C*..
5		*Se* vuelve a emplear la herramienta "*Intersección"* para que quede establecido el de la perpendicular con el lado *a, "D". <u>Atención</u>:* Es importante distinguir que lo que se interseca sea la perpendicular con el lado, no con el triángulo que es una alternativa también posible pero errónea en este caso.
6		Con *"Circunferencia (centro, punto)"* se completa la construcción con un *clic* en el punto centro *O* y otro en el de intersección recientemente creado, "*D"*
7		Con *"Elige y Mueve"* se puede emplear el ratón o *mouse* para desplazar los vértices del triángulo y notar como toda la construcción se ajusta dinámicamente a los cambios, manteniendo las relaciones establecidas que dan lugar a la circunferencia correspondiente.

Algunas Pistas

Los botones de "**Deshace**"/ y "**Rehace**" en la esquina derecha de la barra de herramientas son muy útiles para el desenvolvimiento de cualquier construcción y conviene emplearlos al menos tentativamente

Para **ocultar un objeto**, basta con apuntarlo y con un *clic* derecho (en SO Mac, Ctrl-*clic*) y en el menú contextual desplegado, quitar el tilde a *Objeto visible*.

Para cambiar la **apariencia de los objetos,** (color, tipo de trazo,...) se puede emplear la barra de estilo: un *clic* en el objeto y luego en el botón del margen superior derecho de la **Vista Gráfica**, la expone u oculta.

Los **Ejes** y la **Cuadrícula** pueden mostrarse u ocultarse empleando la Barra de Estilo que se despliega pulsando en el botón cuando, dentro de la **Vista Gráfica** no hay objeto alguno seleccionado:

Se pùeden seleccionar diferentes *vistas* - como la **Vista Algebraica, Gráfica, Hoja de Cálculo** y/o **CAS** de Algebra Simbólica, según se tilden o no en el menú **Vista** que se puede seleccionar de la lista desplegada al pulsar en el botón de **Menú**.

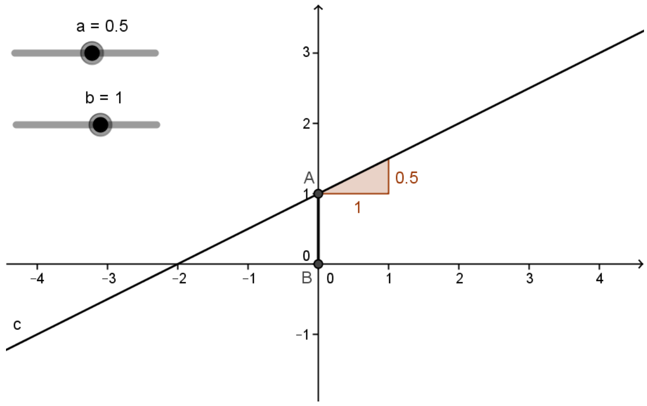
Para **desplazar la construcción** en la **Vista Gráfica**, basta con seleccionar la herramienta que "**Desplaza la Vista Gráfica**" y arrastrarla.

El **Protocolo de Construcción** es un ítem del menú **Vista** en cuya ventana emergente se lista la secuencia de construcción (para revisarla paso a paso y cambiar el orden o modificarla). Usando los botones correspondientes se puede volver a realizar la construcción paso a paso. En su propio menú se fija la lista exhaustiva de datos a ostentar por cada paso de construcción.

- Además, se pueden desplazar las filas de cada paso hacia arriba o abajo para modificar el orden de los pasos.

Ejemplo 2: Parámetros de una Ecuación Lineal

Desafío: *Cambiar dinámicamente los parámetros de una ecuación lineal usando deslizadores.*



Preparativos

- Abrir la versión *Web* o para *Applet* de GeoGebra y seleccionar la **Perspectiva** de **Álgebra** de la pantalla inicial o
- Con un *clic* en el botón de **Menú** del extremo superior derecho de la ventana de GeoGebra para seleccionar **Nuevo** del menú de **Archivo** y recién entonces elegir la **Perspectiva** de **Álgebra** de la pantalla inicial

Pasos de Construcción

1		Ingresar en el **Campo de Entrada** *y = 0.8 * x + 3.2* y pulsar Enter.
2		**Exploración**: ¿Qué parámetros se modifican al cambiar la posición de la recta, arrastrándola por la **Vista Gráfica**?
3		En la **Vista Gráfica**, con la herramienta adecuada, borrar la recta **¡OjO!:** Es necesario abrir la **Barra de Herramientas** para seleccionar la que se precisa.
4	a = 2	Con la herramienta adecuada, crear un par de deslizadores ***a*** y ***b*** aceptando los valores por omisión para uno y otro. **¡OjO!**: Después del *clic* en la **Vista Gráfica** se despliega un cuadro que permite especificar los parámetros del deslizador en marcha. Un *clic* allí, se cierra el cuadro, se aceptan los valores en base a los cuales se crea el deslizador.
5		Ingresar en el **Campo de Entrada** *y = a * x + b* y pulsar Enter
6		Seleccionar la herramienta *Intersección* desde la **Barra de Herramientas** de la **Vista Gráfica** para crear el punto en que la recta corta el Eje-x.
7		Seleccionar la herramienta que permite incorporar un *Punto en Objeto* para crear uno en el origen
8		Con la herramienta *Segmento*, crear el que tenga a uno y otro de los puntos creados como extremos.
9		Con la herramienta *Pendiente*, crear la de la recta que contiene al segmento creado.

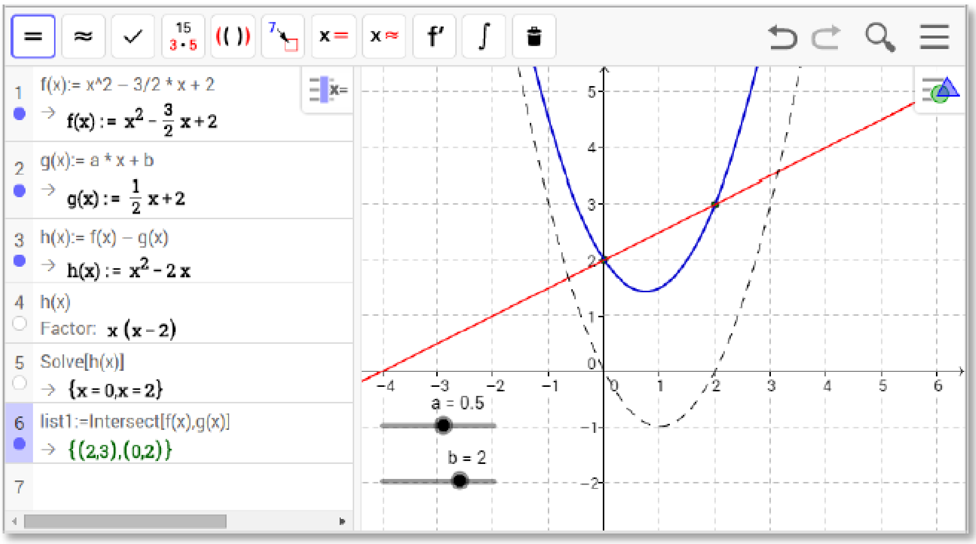
Detalles Cosméticos

Se puede mejorar el aspecto de la construcción apelando a los recursos que se ofrecen en la **Barra de Estilo**.
Por ejemplo, incrementando el grosor del segmento para que resalte respecto del eje de ordenadas, mostrar el valor de la pendiente en lugar del nombre u otros detalles.
Para lograrlo, basta con seleccionar el objeto y pulsar en el botón de **Gráficos** de la esquina superior derecha de la **Vista Gráfica** abriendo así la **Barra de Estilo**:



Ejemplo 3: Intersección de Funciones Polinómicas

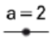
Desafío: *Indagar cómo una parábola puede intersecar a una función lineal determinando las raíces de sendas funciones.*



Preparativos

- Abrir la versión *Web* o para *Applet* de GeoGebra y seleccionar la **Perspectiva** de **CAS** de la pantalla inicial o
- Con un *clic* en el botón de **Menú** del extremo superior derecho de la ventana de GeoGebra para seleccionar **Nuevo** del menú de **Archivo** y recién entonces elegir la **Perspectiva** **CAS** de la pantalla inicial

Pasos de Construcción

1		Para este procedimiento, basta introducir en la primera fila de la **Vista CAS** el siguiente contenido, pulsando Enter al final: ***f(x):= x^2 – 3/2 * x + 2***
2		Con la herramienta adecuada, crear un par de deslizadores ***a*** y ***b*** aceptando los valores por omisión para uno y otro. **¡OjO!**: Después del *clic* en la **Vista Gráfica** se despliega un cuadro que permite especificar los parámetros del deslizador en marcha. Un *clic* allí, se cierra el cuadro, se aceptan los valores en base a los cuales se crea el deslizador.
3		Ingresar en la segunda fila de la **Vista CAS** el siguiente contenido, correspondiente a una función lineal, pulsando Enter al final ***g(x):= a * x + b***
4		En la **Vista Gráfica**, con la herramienta de *Desplazamiento*, cambiar a 0.5 el valor del deslizador ***a*** y a 2 el de ***b***.
5		Anotar en la tercera fila de la **Vista CAS** el siguiente contenido, para establecer la diferencia entre sendas funciones, pulsando Enter al final: ***h(x):= f(x) – g(x)***
6	15 3 • 5	Ingresar h(x), luego seleccionar la herramienta *Factoriza* desde la **Barra de Herramientas** de la **Vista CAS** para factorizar el polinomio. **¡OjO!**: Pueden usarse estos factores para determinar las raíces de h(x)
7		Anotar en la cuarta fila de la **Vista CAS**, el comando **Resuelve[h(x)]** para confirmar el valor de las raíces
8		Ingresar **Interseca[f(x), g(x)]** para crear los puntos de intersección de las funciones **f(x)** y **g(x).**
9		**Exploración**: Por tanteo y experimentación se puede procurar descubrir qué tienen en común los puntos de intersección de **f(x)** y **g(x)** con las raíces de la función diferencia **h(x).** Cambiando los valores de los parámetros de la función lineal se puede llegar a establecer para qué valores de ***a*** y ***b*** hay dos puntos de intersección, uno o ninguno. **¡OjO!** Con la herramienta de **Desplazamiento**, se puede cambiar el valor de los deslizadores para crear nuevas funciones a explorar.

Consideraciones

La **Vista CAS** permite operar con fracciones, ecuaciones y fórmulas que incluyan literales (o, dicho de otro modo, variables no definidas).

Ingresos y auto-completado:

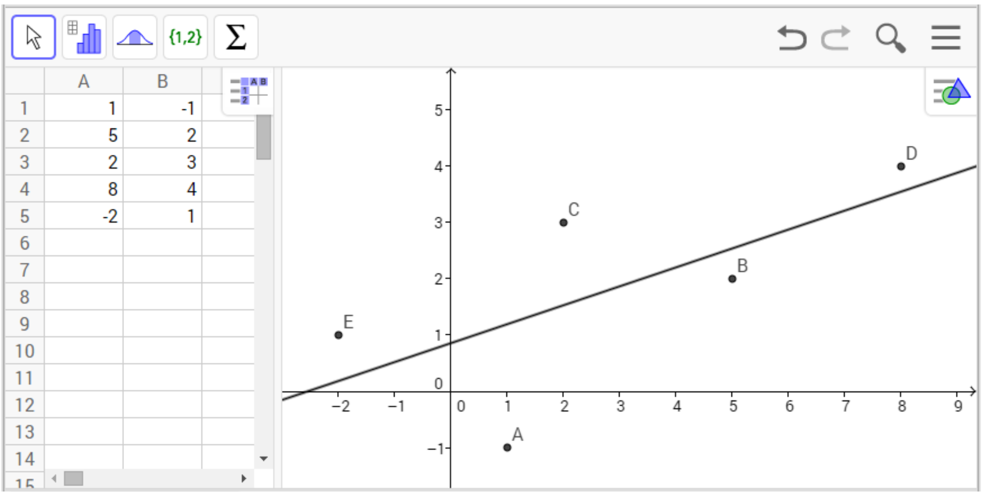
=	Ingresar ***y = 2 x + 1*** para definir una ecuación
:=	Ingresar ***f(x):= 2x + 1*** para asignarle el nombre ***f*** a la función.
() []	Al anotar paréntesis o corchetes de apertura, GeoGebra intercala los de cierre correspondientes automáticamente
	Al anotar las primeras letras de un comando en la **Vista CAS**, GeoGebra intenta completarlo automáticamente proponiendo una sintaxis posible e incluso desplegando una lista de sugerencias de la que se puede elegir la alternativa que se precise.

La **Barra de Herramientas** de la **Vista CAS** ofrece tres diferentes para establecer el resultado de lo ingresado:

=	***'Evalúa'*** calcula y simplifica lo ingresado en términos simbólicos
≈	***'Valor numérico'*** calcula numéricamente lo ingresado y establece el resultado en notación decimal
✓	'***Conserva entrada***' conserva y controla lo ingresado. Es muy útil cuando solo se quiere una simplificación automática como, por ejemplo al anotar expresiones con las que se va a operar por secciones.
Se puede operar incluso con partes de una expresión. Basta con seleccionar la que se quiere tratar y pulsar en la herramienta adecuada. Como, por ejemplo, la que 15 3·5 ***Factoriza***.	

Ejemplo 4: Gráfico de Dispersión y Recta de Mejor Ajuste

Desafío: *Crear un Gráfico de Dispersión y emplear la herramienta de Análisis de Regresión de dos variables para el conjunto de datos en juego. Explorar cómo los datos atípicos afectan al mejor ajuste lineal.*



Preparativos

- Abrir la versión *Web* o para *Applet* de GeoGebra y seleccionar la **Perspectiva** de **Hoja de Cálculo** de la pantalla inicial o
- Con un *clic* en el botón de **Menú** del extremo superior derecho de la ventana de GeoGebra para seleccionar **Nuevo** del menú de **Archivo** y recién entonces elegir la **Perspectiva** **Hoja de Cálculo** de la pantalla inicial

Pasos de Construcción

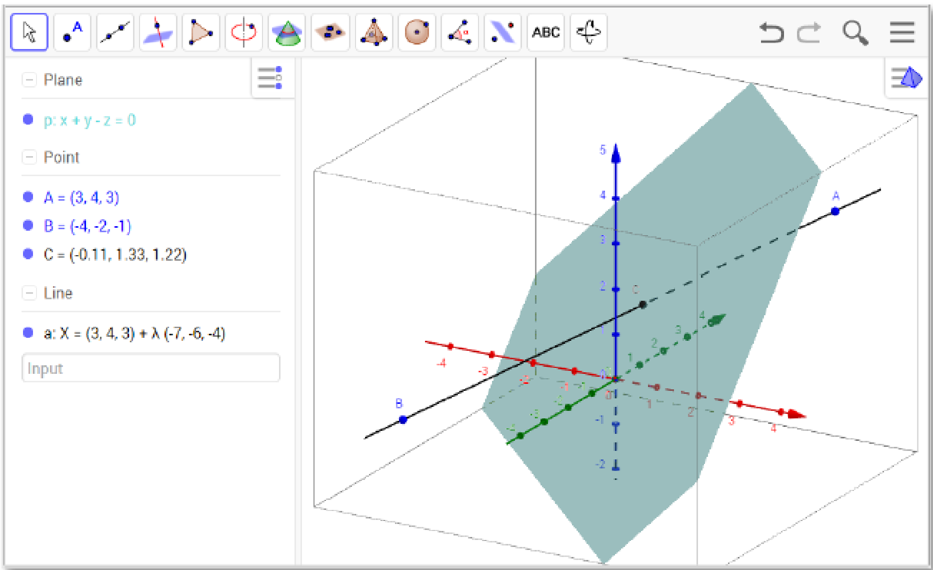
1	Ingresar los siguientes datos en la Hoja de Cálculo, en las sucesivas celdas de la columna *A*: *A1: -1 A2: 2 A3: 3 A4: 4 A5: 1* ¡OjO!: Para validar cada valor ingresado debe pulsarse la tecla *Enter*.
2	Anotar los siguientes números en las celdas de la columna B: *B1: -1 B2: 2 B3: 3 B4: 4 B5: 1*
3	Crear un *Gráfico de Dispersión* a partir de los datos. Seleccionar todas las celdas de las columnas *A* y *B* que contengan los datos. Luego, la herramienta ***Listado de puntos*** de la **Barra de Herramientas** de la **Hoja de Cálculo** para crear los puntos acorde a los datos ingresados. **Atención**: Los valores de la columna *A* determinan la coordenada *x* y los de *B* las ordenadas de los puntos. **¡OjO!**: Puede ser necesario emplear la herramienta que ***Desplaza la Vista Gráfica*** si alguno de los cinco puntos no quedara visible.
4	Seleccionar la herramienta ***Análisis Regresión de dos variables*** de la **Barra de Herramientas** de la **Vista Gráfica**. Crear la recta de mejor ajuste a los datos enmarcando los puntos en una selección rectangular que los contenga. **¡OjO!**: Crear una selección rectangular con un *clic* en el vértice superior izquierdo de la **Vista Gráfica** para luego deslizarse hacia inferior derecho de modo de dar cabida a todos los puntos en tal encuadre.
5	Exploración: A partir de esta construcción se puede evidenciar cómo los datos atípicos afectan a la recta de mejor ajuste de un conjunto de datos. Para ilustrar este efecto, basta con arrastrar a uno o dos de los puntos para que opera como atipicidad. **¡OjO!**: You can also change the initial data directly in the *Spreadsheet View*

Detalles Cosméticos

Se puede mejorar el aspecto de la construcción apelando a los recursos que se ofrecen en la **Barra de Estilo**.
Por ejemplo, incrementando el grosor del segmento para que resalte respecto del eje de ordenadas, mostrar el valor de la pendiente en lugar del nombre u otros detalles.
Para lograrlo, basta con seleccionar el objeto y pulsar en el botón de **Gráficos** de la esquina superior derecha de la **Vista Gráfica** abriendo así la **Barra de Estilo**:

Ejemplo 5: Punto de Intersección de una Recta y un Plano

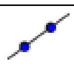
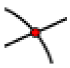
Desafío: *Descubrir cómo se pueden intersecar un plano y una recta en la Vista 3D (tridimensional) de GeoGebra.*



Preparativos

- Abrir la versión *Web* o para *Applet* de GeoGebra y seleccionar la **Perspectiva** de  **Vista Gráfica 3D** de la pantalla inicial o
- Con un *clic* en el botón de  **Menú** del extremo superior derecho de la ventana de GeoGebra para seleccionar  **Nuevo** del menú de  **Archivo** y recién entonces elegir la **Perspectiva**  Vista Gráfica 3D de la pantalla inicial

Pasos de Construcción

1		Ingresar ***p: x + y = z*** en el **Campo de Entrada** de la **Vista Algebraica** pulsando la tecla Enter para definir el plano *p*.
2		Crear dos puntos *A* y *B* anotando ***A* = *(3, 4, 3)*** y ***B* = *(-4, -2, -1)*** en el **Campo de Entrada** de la **Vista Algebraica** pulsando la tecla Enter tras cada entrada.
3		Seleccionar la herramienta *Recta* de la **Barra** de las de la **Vista 3D y con un *clic*** sobre los puntos *A* y *B* respectivamente para crearla.
4		Con la herramienta de *Intersección* y un *clic* en el plano y la recta, se cre el punto correspondiente.
5		**Exploración**: Con la herramienta de *Desplazamiento* se puede cambiar la posición de los puntos *A* y *B* par air detectando qué sucede con el punto de intersección si la recta es paralela al plano, o si sendos puntos están en el mismo plano, por ejemplo.

Detalles de Apreciación

Al rotar la **Vista 3D,** con la correspondiente herramienta, se logran diferentes puntos de apreciación de la construcción.

Retoques Cosméticos

Se puede mejorar el aspecto de la construcción apelando a los recursos que se ofrecen en la **Barra de Estilo**.
Por ejemplo, incrementando el grosor del segmento para que resalte respecto del eje de ordenadas, mostrar el valor de la pendiente en lugar del nombre u otros detalles. Para lograrlo, basta con seleccionar el objeto y pulsar en el botón de **Gráficos** de la esquina superior derecha de la **Vista Gráfica** abriendo así la **Barra de Estilo**:

Incluso se pueden ocultar tanto los ejes de coordenadas como el plano x-y- apelando a la **Barra de Estilo**. Basta con un *clic* en cualquier lugar libre de la **Vista Gráfica** para asegurarse de no tener seleccionado objeto alguno y luego seleccionar el botón de **Gráficos** que se encuentra en el vértice superior derecho de la, para habilitarla:

Más Información

GeoGebra ofrece ejemplos de todo tipo además de otras informaciones y recursos
Quedan invitados a visitar…

Software	http://www.geogebra.org La página web de *GeoGebra* www.geogebra.at en que encontrarán tanto información complementaria y diversificada como... ¡la última versión del programa!
Manual y Tutoriales	http://wiki.geogebra.org Consultas al foro o a la moderadora lms@centrobabbage.com
GeoGebraTube	http://www.geogebratube.org
Foro de Usuarios	http://www.geogebra.org/forum
Por sugerencias o avisos, dirigirse en inglés al foro o, en español, a la traductora y moderadora, liliana.saidon@centrobabbage.com	
Traducción, actualización, edición y revisión de Liliana Saidon liliana.saidon@centrobabbage.com Directora del Centro Babbage – Instituto GeoGebra para la República Argentina.	